Primzahlen und ein Algorithmus für Primfaktoren

Gebhard Glöggler

www.primzahlen-und-primfaktoren.de   V01/21 P2

ZUSAMMENFASSUNG:

Die ersten Primzahlen bilden Gruppen, in denen alle anderen Primzahlen enthalten sind. Dies wird zuerst dargestellt. Eine Analyse der Gruppen liefert eine Aussage über den Abstand von Primzahlen, eine Erweiterung des Bertrandschen Postulats, Goldbachs Vermutung und einen Algorithmus zur Berechnung von Primzahlen und zur Primfaktorzerlegung. Die Ergebnisse werden mit Riemanns Zeta-Funktion verglichen.

1. Einleitung

Eine ganze Zahl > 1, die keine natürlichen Teiler außer sich selbst und 1 hat, heißt Primzahl.
Über die Anordnung von Primzahlen sind schon viele Abhandlungen veröffentlicht worden. Eine gewisse Systematik ihrer Verteilung zeigt sich in der sogenannten Ulam-Spirale oder Primzahl-Spirale [1]. Sie wurde 1963 von dem polnischen Mathematiker Stanislaw Ulam während eines wissenschaftlichen Vortrags entdeckt, als er Zahlenreihen auf ein Papier kritzelte. Er begann mit der "1" in der Mitte und fuhr dann in Spiralform fort. Wenn man dann die Primzahlen markiert, stellt man fest, dass viele Primzahlen sich auf diagonalen Geraden befinden, wie es die Grafik (Abbildung 1) zeigt.

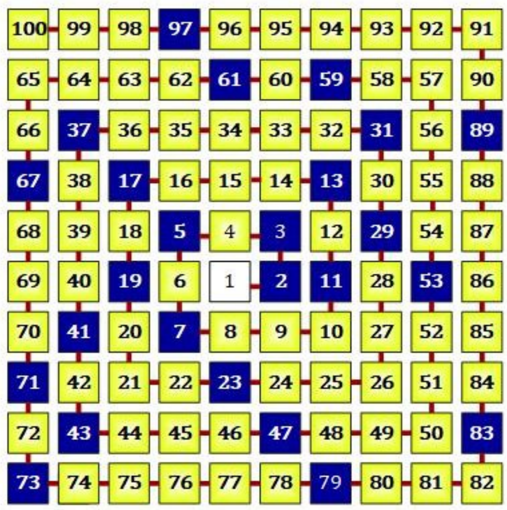


Abbildung 1: Die Ulam-Spirale

Vernachlässigt man die einzige gerade Primzahl 2, so tritt der Effekt noch deutlicher zutage. Dies hat mich angeregt, eine weitere systematische Anordnung zu untersuchen.

2. Prime Restklassen

Eine andere Systematik der Primzahlen wird in gewissen primen Restklassen, im folgenden auch "Stempel" genannt, sichtbar. Deren Bedeutung soll nun beschrieben werden. Mit p seien die Primzahlen bezeichnet und $p_1, p_2, \ldots$ seien die Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge. Analog zum Faktorprodukt n! sei ein Primzahlenprodukt p# definiert durch

$$\textbf{Definition (1):} \quad p_n\# = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Dies ist das Produkt der ersten n Primzahlen. Wenn es nicht auf die Anzahl n ankommt, lasse ich den Index weg und bezeichne mit $p\#$ ein solches Produkt.

2.1 Der 6-er Stempel

In vielen Artikeln über Primzahlen wird erwähnt, dass sämtliche Primzahlen > 3 die Form 6k - 1 oder 6k + 1; k = 1, 2, 3, . . besitzen. In Abbildung 2 ist dies bis zur Zahl 30 dargestellt. In der ersten Zeile, der Grundlinie, d.h. dem Stempel (zu dem immer auch die "1" gehört), sind die ersten 6 Zahlen dargestellt. In den weiteren Zeilen sind wiederum je 6 Zahlen enthalten. Eine Zahl am Kreuzungspunkt von Zeile und Spalte ergibt sich aus der Summe der Zahl am linken Rand und der Zahl am oberen Rand. Die 2 Kreise mit weißen Innenbereich sind die Primzahlen 2 und 3. Die schwarzen Punkte sind die restlichen Primzahlen ‹ 30. Die beiden Zahlen 2 und 3 sind die Primteiler von 6. Man nennt die Zahlen 1 und 5 die primen Restklassen modulo 6.

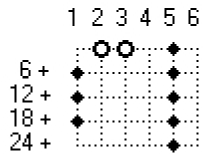


Abbildung 2: Der "6-er Stempel" und die Primzahlen < 30, angeordnet in Zeilen zu je 6 Spalten

Die Anzahl von 6 Spalten ergibt sich aus dem Produkt der ersten 2 Primzahlen 2 und 3. Alle Primzahlen außer 2 und 3 liegen auf der ersten und fünften Spalte, dem "6-er Stempel". Die Zahlen auf den anderen Spalten sind entweder durch 2 oder durch 3 teilbar.

2.2 Der 30-er Stempel

Auch in einer Anordnung der Zahlen zu je 30, dem Produkt der ersten 3 Primzahlen 2, 3 und 5, liegen die Primzahlen (ausgenommen die Primzahlen 2, 3 und 5) in bestimmten Spalten. Dies ist in Abbildung 3 bis zur Zahl 210 dargestellt. [siehe auch: "Kurt Diedrich: Primzahl-Lücken-Verteilung ohne Geheimnisse? www.primzahlen.de"]. Es wird hier eine graphische Darstellung gewählt, um die Zusammenhänge anschaulich zu machen und für alle verständlich, die an diesem Problem interessiert sind.

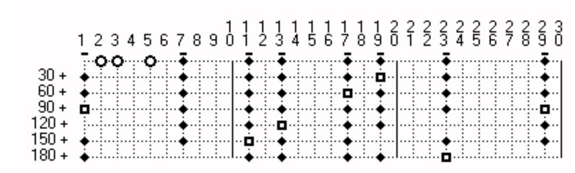


Abbildung 3: Der "30-er Stempel" und die Primzahlen < 210, in Zeilen zu je 30 Spalten angeordnet.

Wiederum sind die schwarzen Punkte die Primzahlen < 210. Zum Ablesen und Bestimmen einer Zahl sind am linken Rand und am oberen Rand Zahlen eingezeichnet (bei den Zahlen am oberen Rand sind die Ziffern untereinander geschrieben). Am Kreuzungspunkt von Zeile und Spalte steht diejenige Zahl, die sich aus der Summe der oberen und linken Zahl ergibt. Die Primzahlen 2, 3 und 5, die Primteiler, dargestellt durch 3 Kreise mit weißem Innenbereich, gehö nicht zum Stempel, der primen Restklasse. Auf den Spalten der Primteiler liegen keine weiteren Primzahlen. Die Linien sind gestrichelt, jede zehnte Linie ist zur besseren Orientierung durchgezogen. Auf die Zahlen, welche durch kleine Quadrate mit weißem Innenbereich gekennzeichnet sind, möchte ich am Ende dieses Abschnittes eingehen.
Bezeichnet man einen derartigen Stempel mit S, so kann man den 30-er Stempel mit Hilfe der Definition von $p_n\#$ auch mit $S_{5\#}$ bezeichnen. Seine Elemente sind die 1 und die Primzahlen, außer 2, 3 und 5 in der 1. Zeile, der Grundlinie. In Abbildung 3 sind sie mit einem Querstrich markiert. Diese bezeichne ich mit $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Wir haben hier 8 Spalten,

2.3 The 2-Stamp

Der kleinste Stempel, den man auf diese Art bilden kann, besteht aus zwei Spalten. Die ersten Zeile enthält die 1 und als erste Primzahl die 2. Die nächste Primzahl 3 liegt in der zweiten Zeile. Dargestellt sind in Abbildung 4 nur 3 Zeilen.

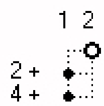


Abbildung 4: Der "2-er Stempel" und die Primzahlen < 6, angeordnet in 2 Spalten

Die erste Spalte enthält alle Primzahlen < 2. Dies ist wohlbekannt: Alle Primzahlen > 2 sind ungerade. Untersucht man die Stempel genauer, so stellt an fest, dass sie aufeinander aufbauen. Beispielsweise entstehen die Zahlen des 30-er Stempels, indem man die Zahlen aus den Spalten 1 und 5 des 6-er Stempels in den ersten 5 Zeilen auswählt und aus dieser Auswahl diejenigen Zahlen eliminiert, welche durch 5 ohne Rest teilbar sind. Dies sind die beiden Zahlen 5 und 25.

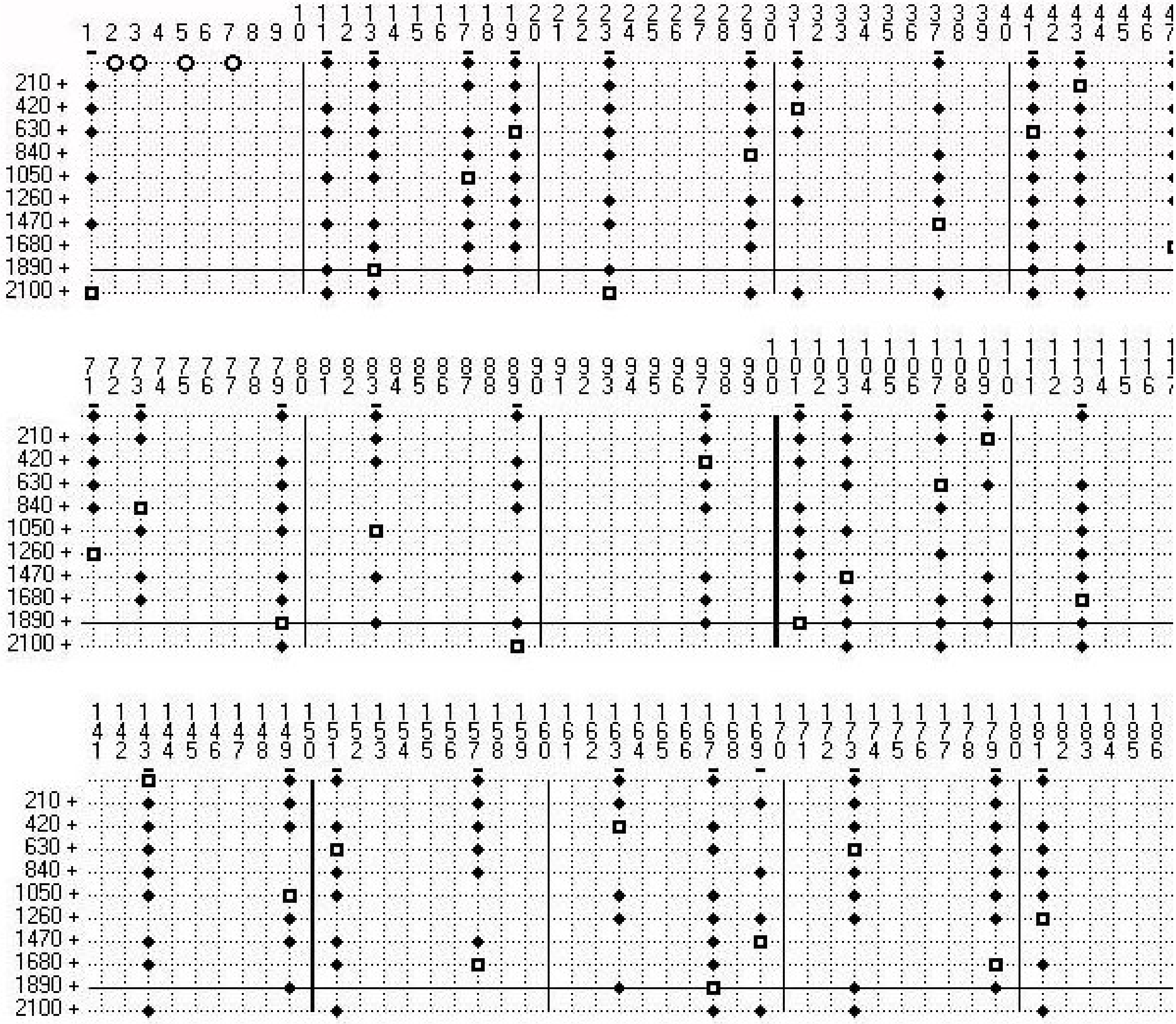
2.4 Der 210-er Stempel

Ebenso entsteht aus dem 30-er Stempel der 210-er Stempel oder $S_{7\#}$. Aus den Spalten des 30-er Stempels werden alle Zahlen bis 210 ausgewählt und diejenigen nicht in den Stempel aufgenommen, welche durch 7 ohne Rest teilbar sind. So erhält man die Stempel-Zahlen des 210-er Stempels. Sie sind in Abbildung 5 daran erkennbar, dass in ihren Spalten alle Primzahlen, außer 2, 3, 5 und 7 liegen. Die Teilmenge P_7 = {2, 3, 5, 7} der Primzahlen bildet den Stempel.

Definition(2) Basis-Primzahlen sollen im folgenden diejenigen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ heißen, die nicht zum Stempel gehören.

Für den Stempel $S_{7\#}$ sind dies die Primzahlen 2, 3, 5 und 7. Nur die "Eins" und die anderen markierten Punkte der ersten Zeile gehören zum Stempel. Auch die Primzahlen > 210 bis 2310 sind in Abbildung 5 zusätzlich eingezeichnet.

Aus Platzgründen besteht Abbildung 5 aus 3 Teilen zu je 70 Zahlen. Die ersten 4 Primzahlen liegen nicht auf den Spalten des Stempels und sind durch Kreise mit weißem Innenbereich gekennzeichnet. Die Zahlen, welche durch Quadrate mit weißem Innenbereich markiert sind, sind durch 11 ohne Rest teilbar und sind für die Bildung des nächsten Stempels von Bedeutung. In den Stempeln $S_{2\#}$, $S_{3\#}$ und $S_{5\#}$ waren alle Zahlen der Stempel, mit Ausnahme der 1, Primzahlen.



Fenster: 1008 x 655

Abbildung 5: Der 210-er Stempel und die Primzahlen < 2310, angeordnet in Zeilen zu je 210 Spalten.

Im Gegensatz dazu tritt hier zum ersten Mal der Fall auf, dass nicht alle Zahlen des Stempels prim sind. Dies ist für die weiteren Ausführungen wichtig. In diesem Stempel sind es die Zahlen 121, 143, 169, 187 und 209, Produkte mit Primfaktoren > 7. Alle Elemente des Stempels $S_{7\#}$ sind wieder mit einem Querstrich gekennzeichnet.

Solche Zahlen kommen entsprechend auch in den höheren Stempeln vor. Ich werde im folgenden auf diesen Stempel öfters zurückkommen, denn an ihm läßt vieles über Primzahlen ablesen. Die Elemente des Stempels sind jeweils die Zahlen der ersten Spalte, die mit einem scharzen Punkt gekennzeichnet sind. Hinzu kommt noch die 1. Man sieht, dass in den nachfolgenden Zeilen der Stempel nicht präzise arbeitet. In jeder Zeile sind auch Lücken. Im Gegensatz dazu tritt hier zum ersten Mal der Fall auf, dass nicht alle Zahlen des Stempels prim sind. Dies ist für die weiteren Ausführungen wichtig. In diesem Stempel sind es die Zahlen 121, 143, 169, 187 und 209, Produkte mit Primfaktoren > 7. Alle Elemente des Stempels $S_{7\#}$ sind wieder mit einem Querstrich gekennzeichnet. Solche Zahlen kommen entsprechend auch in den höheren Stempeln vor. Ich werde im folgenden auf diesen Stempel öfters zurückkommen, denn an ihm läßt vieles über Primzahlen ablesen.

2.5. Anzahl der Elemente

Zunächst beschäftigen uns wir mit der Anzahl der Elemente in den einzelnen Stempeln. Der kleinste Stempel $S_{2\#}$ hat nur ein Element, $s_1 = 1$.

Im nächsten Stempel $S_{3\#}$ liegen die Primzahlen > 5 auf 2 Spalten. Dieser Stempel besitzt also 2 Elemente: $s_1 = 1$ und $s_2 = 5$. Da $S_{5\#}$ eine Breite von 30 hat, bilden wir diesen Stempel aus den ersten 5 Zeilen des Stempels $S_{3\#}$. Von den Zahlen *s , s + 6, s + 12, s + 18, s + 24*, welche in der Spalte s_1 liegen, ist genau eine durch 5 teilbar. Auch die Zahlen s_1, $s_1 + 6$, s_1+12; s_1+18; s_1+24 liegen in einer Spalte und genau eine davon ist durch 5 teilbar. Diese beiden durch 5 teilbaren Zahlen werden nicht in den Stempel $S_{5\#}$ aufgenommen. Wir erhalten somit 8 Elemente in diesem Stempel. Wenn wir dieses Verfahren fortsetzen und zu den nächst höheren Stempeln übergehen, erhalten wir folgendes Ergebnis:

Die Anzahl der Elemente eines Stempels $S_{p_n\#}$ ist $(p_n-1)\# = \prod_{i=1}^{n}(p_i-1)$

Wie wir anhand der Stempel sehen, z. B. beim 210-Stempel, gehören die ersten Primzahlen, hier die 2, 3, 5 und 7, nicht zum Stempel. Der Stempel wird jedoch ausschließlich durch diese Primzahlen gebildet.

Definition(3): Die zu p_i; (i = 1, , , n) teilerfremden Zahlen $s_j \leq \prod_{i=1}^{n} p_i$ heißen **Stempel** $S_{p_n\#}$ ist .
Ein Stempel $S_{p_n\#}$ wird durch die Primzahlen $p_1, p_2, p_3 , , , p_n$ der Teilmenge P_n = 2, 3, , , p_n gebildet. Diese Primzahlen heißen im folgenden die **Primteiler** des Stempels $S_{p_n\#}$.

Definition(4): a mod m heißt prime Restklasse, wenn a und m teilerfremd sind, d.h. ggT(a,m)=1.

Bei den Stempeln handelt es sich um prime Restklassengruppen. Beispielsweise betrachten wir den Stempel $S_{5\#}$. Die Primteiler von 30 sind 2, 3 und 5. Die eulersche φ-Funktion berechnet die Ordnung der Gruppe:

$$\varphi(n) = n * \prod_{p|n}(1-\frac{1}{p})$$

Dabei sind p|n alle Primteiler von n.
Auch damit kann die Anzahl der primen Restklassen berechnet werden. Beispielsweise ergibt sich

$$\varphi(30) = 30 * [(1-\frac{1}{2})*(1-\frac{1}{3})*(1-\frac{1}{5})] = 30 * \frac{4}{15} = 8$$

und die 8 Elemente sind 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 und 29. Genau dies sind die Elemente von $S_{5\#}$ (Abb. 3).
Die Zahlen 1 und $\prod_{i=1}^{n} p_i - 1$ gehören immer zu einem Stempel. Beim Stempel $S_{7\#}$ sind die Elemente s_j zu den Primzahlen 2, 3, 5 und 7 teilerfremd. Für sie gilt:

$$s_j \ mod \ p_i \neq 0; \ \ i = 1, \ . \ . \ . \ , 4; \ \ 1 \leq s_j \leq 210.$$

In den nächsten Intervallen 211 bis 420, 421 bis 630 usw. wiederholen sich die Ergebnisse, wobei einige Zaheln aus dem Stempel entfallen. Wir können aber bei diesen Intervallen von einer Kopie des ersten Intervalls 1 bis 210 sprechen, genauso wie ein Stempel ein eingeprägtes Muster (einigermaßen) kopiert.
Bevor ich mit meinen Ausführungen fortfahre, möchte ich einen bekannten Satz zitieren. Es ist der

Satz 1: Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie:

Jede ganze Zahl n > 1 , n ∈ N , besitzt genau eine Darstellung

$$n = p_1^{m_1} * \ . \ . \ . \ * p_r^{m_r} = \prod_{\rho=1}^{r} p_\rho^{m_r}$$

mit Primzahlen $p_1 < p_2 < p_r$ und Exponenten $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 1$, , , $m_r \geq 1$.
Schon Euklid (325-265 v. Chr.) hat erkannt, dass eine Primzahl, welche das Produkt von a*b teilt, auch Teiler von a oder Teiler von b ist. Bewiesen wurde der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie von C. F. Gauss (1777-1855) und E. Zermelo (1871-1953).

!-- Teil 2.5.5 -->
Wir betrachten einen Stempel $S_{p_n\#}$ mit den Elementen s_j. Er hat die Breite $p_{n\#}$. Das erste Element ist s_1=1, die erste Primzahl in einem Stempel ist $s_2=p_{n+1}$. Ergänzt man den Stempel (die oberste Zeile) zu einem Rechteck mit der Höhe p_{n+1}, um den nächsten Stempel zu bilden, so liegt in diesem Rechteck in jeder Spalte dieses Stempels genau eine Zahl, die durch s_2 teilbar ist. Die Zahlen $s_j + k \times p_{n\#}$; k=0, 1, 2, 3, . . . , p_{n+1} -1 liegen auf einer Spalte eines Stempels $S_{pn\#}$. Die Zahl $p_{n\#}$ ist das Produkt der Primzahlen p_1, , , p_n, also nicht durch p_{n+1} teilbar. Alle Elemente s_j sind kleiner als $p_{n\#}$. Durch die Stempelbildung ist s_2 die nächste Primzahl, also ist $s_2 = p_{n+1}$. Entweder ist s_j selbst durch s_2 teilbar. Dann ist erst wieder die Zahl $s_j + p_{n+1} * p_{n\#}$ durch s_2 teilbar oder s_j ist nicht durch s_2 teilbar. Dann ist s_2 s_j durch s_2 teilbar.

Satz 2: Für p_n# > 2 gilt: Die Stempel sind symmetrisch.

Beweis: Die älteste Vorgehensweise, um die Primzahlen zu ermitteln, ist das Sieb des Eratosthenes (ca. 300 v. Chr.). Die erste Zahl, die nur durch sich selbst und 1 teilbar ist, ist die 2, die erste Primzahl. Zunächst werden alle Vielfachen von 2 aus der Zahlengeraden weggestrichen. Als nächste Primzahl wird die 3 erkannt. Alle Vielfachen der 3 werden weggestrichen usw. . Wenn wir diese Vorgehensweise mit den Primzahlen 2, 3, 5 und 7 auf die Zahlen bis 210, dem Produkt dieser 4 Primzahlen anwenden und die Primteiler selbst auch ausstreichen, erhalten wir den Stempel $S_{7\#}$. Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir die 4 Primzahlen bei 210 einsetzen und rückwärts schreitend ihre Vielfachen ausstreichen. Damit erklärt sich die Symmetrie. Das gleiche Ergebnis ergibt sich auch, wenn wir mit den ersten 5 Primzahlen 2, . . . , 11 den Zahlenbereich bis 2310 = 11# vorwärts und rückwärts durchlaufen oder allgemein für jedes Primzahlenprodukt $p_{n\#}$ mit n > 1. ❏ (❏ = quod erat demonstrandum)

Bei 210 treffen sich die 4 ersten Primzahlen zum ersten Mal auf der Zahlengeraden wieder. Das Sieb des Eratosthenes setzt die Primzahlen bei 0 ein und alle Primzahlen überspringen damit immer die 1. Entsprechend wird, wenn wir den allgemeinen Fall betrachten und bei einem beliebigen Stempel bei $p_{n\#}$, n > 2 beginnen und die Primzahlen rückwärts bis 0 laufen lassen, die Zahl $p_n\# - 1$ stets übersprungen. Das bedeutet: 1 und $p_n\# - 1$ gehören immer zu einem Stempel.

Eine Abschätzung der Anzahl der Primzahlen

Ein Stempel enthält alle Primzahlen bis $p_{n\#}$ außer den n Primteilern, die kleiner sind als s_2. Außerdem enthält jeder Stempel die 1, die keine Primzahl ist. Es gilt daher :

$$Die\ Anzahl\ der\ Primzahlen\ < p_n\#\ ist\ \leq \prod_{i=1}^{n}(p_i - 1) + n - 1$$

Satz 3: Die Elemente s_j des Stempels $S_{p_n\#}$ bilden zusammen mit den Elementen $s_j + k * p_n\#$; j = 1, . . . , m ; k = 1, 2, 3, . . . eine Gruppe mit der Multiplikation als Operation.

Beweis: Die Konstruktion der Stempel beseitigt zunächst alle Zahlen, die durch 2 teilbar sind und die 2 selbst. Im nächsten Schritt wird die nächste Primzahl 3 und alle ihre Vielfachen beseitigt, usw. Durch die Konstruktion des Stempels $S_{pn\#}$ werden alle Primteiler und ihre Vielfachen beseitigt. Jede Zahl $t + p_n\#$, die nicht Element des Stempels ist, ist durch einen der Primteiler teilbar. Damit sind auch die Zahlen $t + k *p_n\#$ durch einen der Primteiler teilbar. Nach Satz 1 ist die Zerlegung in ein Produkt von Primzahlen eindeutig. Damit liegen alle Elemente eines Stempels und ihre Produkte auf den Spalten Stempels $S_{pn\#}$. ❑

Für den kleinsten Stempel $S_{2\#}$ ist die Eigenschaft einer solchen Gruppe wohlbekannt: Produkte von ungeraden Zahlen sind ungerade.

Satz 4: In jedem Stempel S_{pn+1} sind diejenigen Zahlen prim, die < ${p_{n+1}}^2$ sind.

Beweis: Die Elemente eines Stempels sind Repräsentanten der primen Restklassen mod $p_{n\#}$ aus der Reste-Menge {0, 1, 2, . . . , $p_n\# - 1$ }, die zu $p_n\#$ relativ prim sind. In jedem Stempel oder dieser Reste-Menge ist die erste Zahl die 1, das Einheitselement. Das nächste Element s_2 ist p_{n+1}. Das kleinste Produkt, das mit diesen ganzzahligen positiven Elementen gebildet werden kann, ist somit ${s_2}^2$ und deshalb sind alle ganzzahligen positiven Elemente, die kleiner als dieser Wert sind, Primzahlen. ❑

3. Eine Erweiterung des Bertandschen Postulats

Bei Primzahlen gilt das Bertrandsche Postulat:

Satz 5: (Bertrands Postulat): Für jedes n > 1 , n ∈ N gibt es zwischen n und 2n mindestens eine Primzahl.

Bewiesen wurde dieser Satz von P. L. Tschebyschow (1821-1894) und dann auch von J. S. Hadamard (1865-1963) und P. Erdös (1913-1996).

Im folgenden will ich eine Aussage über den Abstand von 2 Primzahlen treffen, die präziser ist als das Bertrandsche Postulat. Dazu wird zunächst der Stempel $S_{7\#}$ näher untersucht. Die Ergebnisse sind entsprechend auf alle Stempel anwendbar. Es gilt der

Satz 6: In jedem Intervall der Größe $2p_n - 2$, dessen obere Intervallgrenze < $p^2{}_{n+1}$ ist, liegt mindestens eine Primzahl.

Beweis : Ich beginne mit dem Stempel $S_{7\#}$ und weise dort Eigenschaften nach, die auch für höhere Stempel gelten. Wenn wir die Modulo-Funktion mit den ersten vier Primzahlen 2, 3, 5 und 7 im Bereich bis 210 bilden, so erhalten wir für die Zahlen von 1 bis 210 unterschiedliche Ergebnisse. Beispielsweise erhält man für die Zahl 63 die Ergebnisse 63 mod 2 = 1, 63 mod 3 = 0, 63 mod 5 = 3 und 63 mod 7 = 0. Ich bezeichne dieses Ergebnis als Quadrupel {1, 0, 3, 0}. Eine Zahl die zu den ersten 4 Primzahlen teilerfremd ist, beispielsweise die Zahl 89 liefert das Quadrupel {1, 2, 4, 5}. Da die Zahl 89 teilerfremd ist, sind natürlich alle 4 Zahlen ≠ 0. Der Stempel $S_{7\#}$ ist symmetrisch in 210, deshalb erhält man für 121, der zu 89 symmetrischen Zahl 1 als Ergebnis {1, 1, 1, 2}, d. h. Zahlen, die mit dem Quadrupel von 89 summiert das Quadrupel {2, 3, 5, 7} ergeben, also wiederum die 4 Primzahlen. Für 147, die zu 63 symmetrische Zahl erhält man das Ergebnis {1, 0, 2, 0}. Die entsprechenden Summen sind mod p_i mit p_i gleich.

Anmerkung: *Die Zahl 121 ist keine Primzahl, jedoch teilerfremd zu 2, 3, 5 und 7 und daher ein Element aus* $S_{7\#}$.

		Primza	
		2	3
Nr	s_j	s_j mod 2	s_j mod 3
1	1	1	1
2	121	1	1
3	31	1	1
4	151	1	1
5	61	1	1
6	181	1	1
7	127	1	1
8	37	1	1
9	157	1	1
10	67	1	1
11	187	1	1
12	97	1	1
13	43	1	1
14	163	1	1
15	73	1	1
16	193	1	1
17	103	1	1
18	13	1	1
19	169	1	1
20	79	1	1
21	199	1	1
22	109	1	1
23	19	1	1
24	139	1	1
25	71	1	2
26	191	1	2
27	101	1	2
28	11	1	2
29	131	1	2
30	41	1	2
31	197	1	2
32	107	1	2
33	17	1	2
34	137	1	2
35	47	1	2
36	167	1	2
37	113	1	2
38	23	1	2
39	143	1	2
40	53	1	2
41	173	1	2
42	83	1	2
43	29	1	2
44	149	1	2
45	59	1	2
46	179	1	2
47	89	1	2
48	209	1	2
		2 – (s_j mod 2)	3 – (s_j mod 3)

Abbildung 6: Die Modulo-Bildung füe alle Elemente von $S_{7\#}$

Die Elemente s_j von $S_{7\#}$ und ihre Quadrupel sind in Tabelle 6 aufgelistet. In $S_{7\#}$ kommt jede mögliche Kombination der Modulo-Bildung genau einmal vor. Dies folgt aus den Chinesischen Restsatz. Die Modulo-Funktionen liefern den Rest zu den vorausgehenden Vielfachen der Primzahlen 2, 3, 5 und 7. Die Funktionen p_i - (s_j mod p_i) liefern die Differenzen zu den nachfolgenden Vielfachen von p_i. Wegen der symmetrischen Lage der Elemente s_j in $S_{7\#}$ gilt

$$s_j \ mod \ p_i = p_i - ((210 - s_j) \ mod \ p_i) \ ; \ i = 1, \ . \ . \ . \ , 4; \ s_j \ \in \ S_{7\#}$$

Dies bedeutet: Für die zu s_j symmetrischen Zahlen 210 - s_j erhält man die nachfolgenden Vielfachen aus derselben Tabelle (Spalte 210 - s_j und unterste Zeile, grau unterlegt). Daraus folgt, dass die Differenz von einem Element aus $S_{7\#}$ zu einem Vielfachen von p_4 = 7 höchstens p_4 - 1, also 6 betragen kann. Dies gilt sowohl für die Differenz zum nachfolgenden s_{j+1} als auch für die Differenz zum vorausgehenden s_j . Damit gilt: Der Abstand zwischen zwei Elementen s_j und s_{j+1} ist höchstens $2p_4$ - 2 = 12 und daher liegt in jedem Intervall der Größe $2ps_4$ - 2 mindestens ein s_j.

Entsprechend liegt zwischen jedem Vielfachen von p_{n+1}, also hier von 11 bis zum Quadrat 121 mindestens eine Primzahl.

Im Stempel $S_{7\#}$ liegt zwischen jedem Vielfachen von 7 mindestens ein Element s_j . Dies muss laut Chinesischem Restsatz nicht für jeden Stempel $S_{pn\#}$ bzw. nicht für jedes s_j im ganzen Bereich jedes Stempels gelten. Wegen Satz 4 können wir uns darauf beschränken, in $S_{pn\#}$ nur den Bereich ≤ $p^2{}_{n+1}$ zu betrachten. Wenn wir den Stempel $S_{2\#}$ betrachten, so sehen wir: Alle ungeraden Zahlen bis zum Quadrat der nächsten Primzahl 3 sind Primzahlen. Erst ab 9, dem Quadrat der nächsten Primzahl 3, wird diese aktiv, um Vielfache von 3 aus der Zahlengeraden nach dem Sieb des Eratosthenes zu entfernen. Dies gilt auch für die nächste Primzahl 5, welche ab 25 aktiv wird (Abb. 2). Alle Produkte mit 5, die kleiner als 25 sind, werden durch Vielfache der Primzahlen 2 und 3 aus der Zahlengeraden entfernt. Entsprechendes gilt auch für alle weiteren Stempel. Daraus folgt, dass sich beispielsweise der Stempel $S_{3\#}$ wiederholt bis $p^2{}_2$ = 25.

Gehen wir zum nächsten Stempel über, so fallen außer der Zahl p_{n+1}, welche zum Primteiler wird, bis $p_{n+2}{}^2$ genau 2 Zahlen aus dem Stempel heraus: $p_{n+1}{}^2$ und p_{n+1} * p_{n+2}. Daraus folgt, dass diejenigen s_j , die zwischen $p_{n+1}{}^2$ und p_{n+1} * p_{n+2} liegen, Primzahlen sein müssen, ebenso diejenigen s_j , die zwischen p_{n+1} * p_{n+2} und $p_{n+2}{}^2$ liegen.

Nach den eben erläuterten Eigenschaften genügt es also zu zeigen:

Satz 7: Für n > 2 gilt: Bis n^2 liegt zwischen jedem Vielfachen von n mindestens eine Primzahl.

Beweis : Ich beginne mit einem Beispiel aus dem Bereich der Primzahlen. Ich wähle den Stempel $S_{7\#}$ und den Bereich bis 121, dem Quadrat der Primzahl 11, und betrachte hier den Zahlenbereich]99, . . . ,110[. Die Intervallgrenzen sind zwei aufeinanderfolgende Vielfache von 11. In diesem Bereich muss also, wie behauptet, eine Primzahl liegen. Dieser Bereich hat 5 gerade und 5 ungerade Zahlen. Die geraden Zahlen werden durch die Vielfachen von 2 entfernt.

Anmerkung: *Mit]a, . . . ,b[wird ein Intervall bezeichnet, das die Zahlen enthält, die größer als a und kleiner als b sind. Die Zahlen a und b gehören nicht zu dieser Zahlenmenge*

Für die ungeraden Zahlen gilt: Maximal 2 davon können durch Vielfache von 3 entfernt werden, maximal je eine durch Vielfache von 5 und von 7. Dies ist der schlimmste Fall ("worst case"), der eintreten kann. Es bleibt also von den 5 ungeraden Zahlen eine übrig. Dies muss eine Primzahl sein. Dies gilt für alle Intervalle](i-1) * 11, . . . ,i * 11[für i = 1, . . . ,11. Ich habe hier ein Intervall gewählt, das oberhalb der 49 liegt. Für Intervalle mit der Obergrenze kleiner als 25 erhöht sich die Anzahl der Primzahlen in einem solchen Intervall entsprechend. Die Annahme, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von 11 bis zum Quadrat 121 keine Primzahl liegt, führt also zu einem Widerspruch.

Wir haben hier eine multiplikative Abbildung der ungeraden Zahlen, die kleiner sind als p_n, auf jedes der Intervalle](i..1) p_n, . . . , p_n[für i = 2, . . . ,p_n. Eine ungerade Zahl, die keine Primzahl ist, bildet dabei mit einem ihrer Primfaktoren ab.

Im Gegensatz zur Addition mit dem neutralen Element 0 gehört das neutrale Element 1 der Multiplikation zu den positiven ganzen Zahlen und ist ungerade. Dies wirkt sich bei jeder multiplikativen Abbildung auf die oberen Intervalle aus. Den unteren Intervallen werden die bereits vorhandenen Primzahlen zugeordnet.

Bei dieser Abbildung gibt es also eine Ausnahme: Die 1, das neutrale Element, kann keine multiplikative Abbildung vollziehen. Werden nur unterschiedliche ungerade Zahlen im Zielbereich getroffen, so haben wir den worst-case: Eine ungerade Zahl bleibt übrig. Sie muss eine Primzahl sein. Werden bei dieser auch gerade Zahlen getroffen oder ungerade Zahlen mehrfach getroffen, so erhöht sich die Anzahl der Primzahlen im Zielbereich entsprechend.

Dies gilt nicht nicht nur für Primzahlen, sondern auch für alle ungeraden Zahlen > 1. Nun zu den geraden Zahlen: ein Intervall]n, . . . ,2n[mit n gerade enthält genauso viele ungerade Zahlen, wie das Intervall]n+1, . . . ,2(n+1)*n[. Ein Beispiel für Intervalle mit geraden Zahlen als Intervallgrenzen zeigt die Abbildung 7. Es ist allgemein bekannt, dass in jedem Intervall]10, . . . , 20[,]20, . . . , 30[bis]90, . . . , 100[mindestens eine Primzahl liegt. Satz 7 erklärt, warum dies so ist.

Intervall Nummer	Intervall	Primzahlen 3	3*	5	7	wo ca
1	]10, . . . ,20[	12	15	15	14	+
2	]20, . . . ,30[	21	27	25	21	+
3	]30, . . . ,40[	33	39	35	35	+
4	]40, . . . ,50[	42	45	45	49	+
5	]50, . . . ,60[	51	57	55	56	+
6	]60, . . . ,70[	63	69	65	63	+
7	]70, . . . ,80[	72	75	75	77	+
8	]80, . . . ,90[	81	87	85	84	+
9	]90, . . . ,100[	93	99	95	91	

Bemerkungen:
* Primdivisor von 9
a Abbildung auf eine gerade Zal
b Mehrfache Abbildung

Abbildung 7: Abbildung der Intervalle]10, . . . , 20[bis]90, . . . , 100[

In jedes Intervall werden die ungeraden Zahlen 3, 5, 7 und 9 abgebildet. Die Zahl 1 kann nicht abbilden und die 9 bildet entweder selbst oder mit einem ihrer Teiler ab. Im 9. Intervall]90, . . . , 100[treffen alle Abbildungen auf unterschiedliche ungerade Zahlen und wir haben deshalb den worst case, d. h. dort liegt nur eine Primzahl. Im 8. Intervall bildet die 7 auf eine gerade Zahl ab, alle anderen Abbildungen sind ungerade und unterschiedlich, dort liegen 2 Primzahlen. Ein anderes Beispiel liefert das 3. Intervall. Dort bilden die Zahlen 5 und 7 auf die gleiche Zahl 35 ab und deshalb liegen in diesen Intervall auch 2 Primzahlen. Alle Intervalle mit Produkten $u_j * u_k < 10$; ungerade und $u_k < 10$; ungerade und $u_j * u_k \neq 10$ enthalten mehr als eine Primzahl.

Bei den Intervallen]11, . . . ,22[usw. ist das Intervall mit der kleinsten Anzahl von Primzahlen das Intervall]110, . . . ,121[mit der Primzahl 113. Nun zurück zu den oben erwähnten größeren Intervallen. Dort lassen sich mit den ungeraden Zahlen u_j und u_k mit $u_j < 1000$ und $u_k < 1000$ viele unterschiedliche Produkte bilden, die zwischen 1000 und 1 000 000 liegen und die ungleich $p_i u^n$ mit $p_i < 1000$ sind. Desgleichen gibt es einige Primzahlen kleiner als 1000, etwa diejenigen zwischen 800 und 1000. Fast die Hälfte von ihnen bildet in einem Intervall nur einmal ab und zwar auf eine gerade Zahl. Ein anderer Teil dieser Primzahlen bildet im nächsten Intervall nur einmal ab und zwar auf eine gerade Zahl. Wiederum ein anderer Teil bidet im dritten Intervall nur auf eine gerade Zahl ab, usw.. Deshalb kann der "worst case " nicht mehr eintreten, d.h. mehr als eine Primzahl liegt in jedem Intervall. Die Intervalle der Größe 21, d.h. die Intervalle]21, . . . , 42[,]42, . . . , 63[bis]420, . . . , 441[haben bereits mindestens 2 Primzahlen, Intervalle der Größe 100 mindestens 7 und Intervalle der Größe 500 mindestens 26 Primzahlen.

Es genügt, die Intervalle bis 1 000 000 zu untersuchen. Dies hat mehrere Gründe:

1. Die " 1 " bildet nicht ab.
2. Mit der Funktion x/ln(x) wird die Anzahl der Primzahlen < x abgeschätzt. Dann kann die Anzahl der Primzahlen im Intervall]x^2 -x, . . . ,x^2[abgeschätzt werden mit

$$(x^2-1/2)/ln(x^2-1/2)-(x^2-x+1/2)/ln(x^2-x+1/2)$$

. Auch diese Funktion ist eine aufsteigende Funktion (für x > 2), d.h. die Anzahl der Primzahlen in den Intervallen nimmt allmählich zu.

Die Tabelle 8 zeigt die minimale Anzahl von Primzahlen in den Intervallen bis]39 800, . . . ,40 000[. In der obersten Zeile sind die Zahlen 0, 1, . . . ,9 eingetragen, in der ersten Spalte die Zahlen 0, 10, . . . ,200.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0+			1	1	1	1	1	1	1	2
10+	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1
20+	1	2	2	2	2	2	3	2	3	3
30+	2	2	3	3	3	3	3	2	2	2
40+	2	3	4	3	3	4	3	3	4	3
50+	3	4	4	4	3	3	4	5	4	3
60+	4	5	4	5	4	5	5	5	5	5
70+	5	5	5	5	5	6	7	6	4	5
80+	6	6	5	6	6	6	6	6	7	7
90+	6	6	6	7	7	7	7	6	6	7
100+	7	7	7	8	7	7	8	6	8	8
110+	8	8	8	7	8	8	9	8	9	9
120+	8	9	10	8	9	10	9	10	9	9
130+	10	10	10	10	10	10	10	10	9	9
140+	9	9	10	11	11	10	9	10	10	11
150+	10	12	10	10	11	10	11	11	11	9
160+	10	10	11	11	12	11	12	11	11	12
170+	12	12	13	11	12	12	13	13	12	13
180+	13	11	13	13	12	13	13	13	11	12
190+	12	14	13	14	13	13	12	15	13	12
200+	11									

Abbildung 8: Minimale Anzahl von Primzahlen in den Intervallen bis 200 $*$ 200

Als Beispiel ist in der obersten Zeile die Zahl 8 mit grauem Hintergrund gekennzeichnet. Bei den Zahlen in der ersten Spalte ist die Zahl 20 mit grauem Hintergrund belegt. Am Kreuzungspunkt der Zeile, die mit 20 beginnt, und Spalte, die mit 8 beginnt (20+8=28), befindet sich die Zahl 3. Dies bedeutet: In jedem der Intervalle]28, . . . , 2*28[,]2*28, . . . ,3*28[bis zum Intervall]27*28, . . ,28*28[befinden sich mindestens 3 Primzahlen. Ein weiteres Beispiel: Die Zahl 11 in der letzten Zeile bedeutet: Die Intervalle zwischen 200, 400, 600,. . . , 39.800, 40.000 haben mindestens 11 Primzahlen.

Untersucht man mit Hilfe einer Tabelle der Primzahlen größere Intervalle z.B. die Intervalle]1000, . . . , 2000[bis]999 000, . . . ,1 000 000[, so stellt man fest, dass dort in jedem Intervall mehr als 50 Primzahlen liegen. Mit Satz 7 ist auch Satz 6 bewiesen. Dieser Satz ist hilfreich für einige Probleme bei Primzahlen.

Der Einfachheit halber werden im folgenden nicht alle Zahlen benutzt, sondern nur die Primzahlen: Für p > 2 gilt:

Bis p^2 ist der Abstand zweier benachbarter Primzahlen < 2p. Dualität: Mit Satz 4 und Satz 7 können wir von dualen Sätzen sprechen: Bei den ganzzahligen Werten > 1 der primen Restklassengruppe $(Z/p_{n\#}Z)^*$ gibt es bis p_{n+1}^2 nur Primzahlen und zwischen jedem Vielfachen von p_{n+1} gibt es bis mindestens eine Primzahl.

Bei großen Zahlen kommt es vor, dass man zwar eine Primzahl kennt, nennen wir sie vorerst p_{n+1}, aber die vorausgehende Primzahl p_n nicht. Da $p_{n+1} - p_n \geq 2$ gilt, wenn wir jetzt n+1 durch n ersetzen, auch die folgende Aussage:

Satz 8: Seien n und n+1 zwei natürliche Zahlen > 1. Dann gibt es zwischen n^2 und $(n+1)^2$ mindestens zwei Primzahlen.

Beweis:

1. Zwischen 1 und 4 gibt es 2 Primzahlen : 2 und 3.

2. Beginnt man mit n^2, so benötigt man 2 Intervalle +1, um $(n+1)^2$ zu erreichen. Auch die Primzahlen dieser beiden Intervalle sind durch die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, . . . , m, mit m ≤ n entstanden. In jedem dieser Intervalle liegt also mindestens eine Primzahl. Berücksichtigt man diese 2 zusätzlichen Intervalle, ändern sich einige Werte in Abbildung 8, der Tabelle bis 200* 200 . Hier ist die 2 in der 1. Zeile, Spalte 9 zu einer 1 geworden. Bis 81 hat sich mit 1, 3, 5 und 7 kein "worst case" eingestellt. Im Intervall]72, . . . ,81[z.B. sind die beiden Zahlen 3 und 5 auf die Zahl 75 gestoßen. Da die 1 nicht abbildet, ergeben sich in diesem Intervall 2 Primzahlen, nämlich 73 und 79. Erst im Intervall]90, . . . ,99[erreichen wir den "worst case", d.h. dort liegt nur eine Primzahl, nämlich 97. Somit haben wir mindestens zwei Primzahlen zwischen n^2 und $(n + 1)^2$. ❑

Weitere Änderungen zu Abbildung 8 findet man bei 70+7, also 77^2, bei 110+9, also 119^2 und bei 170+8, also 178^2.

Im Algorithmus in Abschnitt 5 zeigt sich, dass mit n^2 und den Primzahlen ≤ n^2 die Primzahlen bzw. Primteiler bis $(n+1)^2$ ohne Division bestimmt werden können.

4. Die Goldbachsche Vermutung

Im Jahre 1742 äußerte C. Goldbach (1690-1764) in einem Brief an L. Euler (1707-1783) die Vermutung, ob jede ungerade natürliche Zahl n > 5 als Summe von drei Primzahlen geschrieben werden kann, bzw. ob jede gerade natürliche Zahl n > 4 als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden kann. Beide Sätze sind als Goldbachsche Vermutung bekannt.

Es gibt mehrere Ansätze, diese Vermutung zu beweisen. Dies ist deshalb schwierig, weil Primzahlen durch Bildung von Produkten entstehen und die Bildung einer Summe nicht damit in Zusammenhang gebracht werden kann.

Zunächst soll eine graphische Darstellung einen Überblick geben. Ich stelle die Zahlengerade in der Waagrechten dar und zeichne die Primzahlen ein. Sie sind durch schwarze Punkte in der obersten Zeile gekennzeichnet.

Wir bilden eine Matrix der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Dann zeichnen wir in jeder Spalte, die mit einer Primzahl beginnt, die Primzahlen in senkrechter Richtung ein. Auch in der ersten Spalte zeichnen wir die Primzahlen ein.

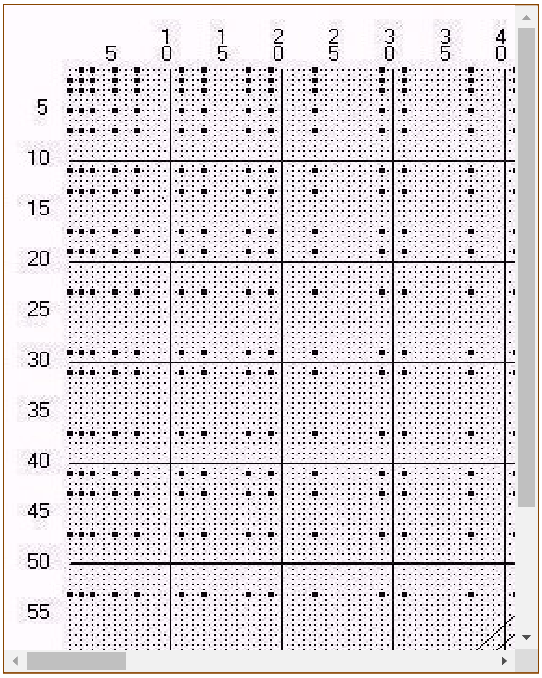


Abbildung 9: Primzahlen in waagrechter und senkrechter Darstellung

Somit erhalten wir ein symmetrisches Bild der Primzahlen. In Bild 9 sind am oberen und linken Rand die Zahlen in 5-er Schritten eingezeichnet.

In der Zeichnung ist zur Orientierung jede zehnte Linie durchgezogen, die 50. Linie ist etwas dicker. Eine Diagonale von 45°, beginnend an einer ungeraden Zahl *2n-1* am oberen Rand durch dieses Zahlenfeld trifft auf Primzahlen. Man kann hier unmittelbar Lösungen für die Goldbachsche Vermutung ablesen. Zum Beispiel trifft die Diagonale, die bei 127 beginnt, bei 109 auf die Zahl 19. Diese beide Zahlen sind nach Konstruktion Primzahlen und ihre Summe ist 128. erfolgen wir die Diagonale weiter, so erhalten wir den Schnittpunkt 31 bei 97, was ebenfalls 128 ergibt und den Schnittpunkt 61 bei 67.

Um Lösungen für die Goldbachsche Vermutung zu finden, müssen wir die Diagonale bei einer ungeraden Zahl beginnen, da die Zeichnung die Null-Zeile nicht enthält, sondern erst bei 1 beginnt. Es fällt auf, dass Diagonalen, die bei einer Primzahl beginnen, schwieriger zum nächsten Schnittpunkt mit einer Primzahl führen, als viele andere Diagonalen, die bei einer ungeraden Zahl beginnen, die keine Primzahl ist. Dies zur Einführung in die Problemstellung.

Wir haben im vorigen Kapitel gezeigt, dass in jedem Intervall der Gröÿe $2p_{n+1}$ mindestens 2 Primzahlen liegen. Wir wollen eine dieser Primzahlen fixieren. Wenn wir dies tun, haben wir noch mindestens eine Primzahl im genannten Intervall. Wir wollen dies am Beispiel mit den ersten 4 Primzahlen 2, 3, 5 und 7 demonstrieren. Der Füll-Bereich hat dann die Gröÿe 22.

Eine der Primzahlen wird auf die 1 fixiert, d. h. wir verwenden die Zahlen 2, 3, 5 und 7 nur so, dass sie nicht auf die 1 treffen. Wir können dann die 2 nur auf der 2 beginnen lassen. Die Primzahl 3 können wir auf 2 einsetzen. Dann trifft sie auf 2, 5, 8 usw.. Wir können sie aber auch auf 3 einsetzen. Dann trifft sie auf 3, 6, 9 und die anderen Vielfachen von 3. Entsprechend dieser Vorgehensweise ist die Primzahl 5 auf 2, 3, 4 und 5 einsetzbar und die Primzahl 7 ist auf 2, 3, 4, 5, 6 und 7 einzusetzen. Im Algorithmus ist festgelegt: Ist ein Feld einer Zeile mit einer Zahl > 0 belegt, so wird das Feld nicht geändert, wenn eine neue Zahl das gleiche Feld belegen soll. Dieses Festhalten an der zuerst eingespeicherten Zahl ist nicht zwingend notwendig. Hier dient es nur zum besseren Verständnis der Abbildung 10.

Zeile	Primzahlen / Einsatzpunkte 2	3	5	7	Bereich von 1 bis 22: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	Nullen	Elemente aus $S_{7\#}$ fw	bw
1.	2	2	2	2	0	2	0	2	3	2	5	2	7	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	0	2	5	209	1
2.	2	2	2	3	0	2	7	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	0	2	5	89	121
3.	2	2	2	4	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	0	2	6	179	31
4.	2	2	2	5	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	7	2	0	2	5	59	151
5.	2	2	2	6	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	7	2	0	2	3	2	0	2	0	2	5	149	61
6.	2	2	2	7	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	7	2	5	29	181
7.	2	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	7	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	4	83	127
8.	2	2	3	3	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	5	173	37
9.	2	2	3	4	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	5	53	157
10.	2	2	3	5	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	7	2	0	2	4	143	67
11.	2	2	3	6	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	5	23	187
12.	2	2	3	7	0	2	5	2	3	2	7	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	7	2	3	113	97
13.	2	2	4	2	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	5	167	43
14.	2	2	4	3	0	2	7	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	4	47	163
15.	2	2	4	4	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	5	137	73
16.	2	2	4	5	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	5	17	193
17.	2	2	4	6	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	7	2	0	2	3	2	5	2	0	2	4	107	103
18.	2	2	4	7	0	2	0	2	3	2	7	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	7	2	3	197	13
19.	2	2	5	2	0	2	0	2	3	2	0	2	7	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	5	41	169
20.	2	2	5	3	0	2	7	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	5	131	79
21.	2	2	5	4	0	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	6	11	199
22.	2	2	5	5	0	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	7	2	0	2	5	101	109
23.	2	2	5	6	0	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	7	2	5	2	3	2	0	2	0	2	5	191	19
24.	2	2	5	7	0	2	0	2	3	2	7	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	7	2	4	71	139
25.	2	3	2	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	4	139	71
26.	2	3	2	3	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	4	19	191
27.	2	3	2	4	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	7	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	3	109	101
28.	2	3	2	5	0	2	3	2	7	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	7	2	3	2	2	199	11
29.	2	3	2	6	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	7	2	3	2	5	2	0	2	3	2	3	79	131
30.	2	3	2	7	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	4	169	41
31.	2	3	3	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	13	197
32.	2	3	3	3	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	7	2	0	2	3	2	4	103	107
33.	2	3	3	4	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	7	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	4	193	17
34.	2	3	3	5	0	2	3	2	7	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	7	2	3	2	3	73	137
35.	2	3	3	6	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	163	47
36.	2	3	3	7	0	2	3	2	0	2	7	2	3	2	0	2	5	2	3	2	0	2	0	2	3	2	4	43	167
37.	2	3	4	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	5	97	113
38.	2	3	4	3	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	7	2	5	2	3	2	4	187	23
39.	2	3	4	4	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	7	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	4	67	143
40.	2	3	4	5	0	2	3	2	7	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	4	157	53
41.	2	3	4	6	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	7	2	3	2	0	2	5	2	3	2	4	37	173
42.	2	3	4	7	0	2	3	2	0	2	7	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2	4	127	83
43.	2	3	5	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	5	181	29
44.	2	3	5	3	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	7	2	0	2	3	2	4	61	149
45.	2	3	5	4	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	7	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	4	151	59
46.	2	3	5	5	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	7	2	3	2	4	31	179
47.	2	3	5	6	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	7	2	3	2	0	2	0	2	3	2	4	121	89
48.	2	3	5	7	0	2	3	2	5	2	7	2	3	2	0	2	0	2	3	2	0	2	0	2	3	2	4	1	209

Abbildung 10: Startpositionen von P7 = {2, 3, 5, 7} bei Fixierung einer Primzahl

Insgesamt ergeben sich damit 48 Einsatzmöglichkeiten. Dies ist in Tabelle 10 dargestellt. Die erste Zeile im Bereich 1 bis 22 der Tabelle entsteht folgenderma ßen: Zunächst wird der Füll-Bereich von 1 bis 22 gelöscht, d. h. mit Nullen vorbelegt. Die Primzahl 2 wird auf 2 eingesetzt. Sie selbst und ihre Vielfachen belegen die Zahlen 2, 4, 6, . . . , 22. Auch die Primzahl 3 wird auf 2 eingesetzt. Sie und ihre Vielfachen belegen dann die Zahlen 2, 5, 8, 11, 14, 17 und 20. Die Primzahl 5 wird ebenfalls auf 2 eingesetzt, ebenso die Primzahl 7. Damit ist die erste Zeile komplett.

In der zweiten Zeile wird mit den Primzahlen 2, 5 und 7 ebenso verfahren, wie in der 1. Zeile. Lediglich die Primzahl 3 startet jetzt auf Position 3. Sie und ihre Vielfachen belegen dann die Felder 3, 6, 9, 12, . . . , 21. In entsprechender Weise entstehen die weiteren Zeilen. Bemerkenswert ist die letzte Zeile. In ihr werden die Primzahlen genau so eingesetzt, wie wir es aus dem Sieb des Eratosthenes kennen.

Wie wir sehen, gibt es 48 Möglichkeiten und wir können deshalb versuchen, sie den Elementen s_j von $S_{7\#}$ zuzuordnen. Zunächst zur letzten Zeile. Sie ist zweifellos der 1 von $S_{7\#}$ zuzuordnen. Die Elemente in $S_{7\#}$ sind, wie wir wissen, nicht durch die ersten 4 Primzahlen teilbar. Darüber hinaus hat jedes Element folgende Eigenschaft: Es hat eindeutig eine Differenz zum nächsten Vielfachen der Primzahlen 2, 3, 5 und 7. Ich möchte dies an zwei Beispielen darlegen:

Beispiel 1: Für das Element 83 liegen die nächsten Vielfachen von 2, 3, 5 und 7. und 7 bei 84, 84, 85 und 84. Die Differenzen zu 83 sind also 1, 1, 2 und 1. Diese entsprechen in Abbildung 8 den Startpositionen 2, 2, 3,und 2. Dies ist die siebte Zeile. Deshalb ist dort unter fw (foward) die 83 eingetragen.

Beispiel 2: Für Element 43 liegen die nächsten Vielfachen von 2, 3, 5 und 7 bei 44, 45, 45 und 49. Die Differenzen zu 43 sind also 1, 2, 2 und 6, d. h. sie entsprechen den Startpositionen 2, 3, 3 und 7. Dies ist die 36. Zeile. Deshalb ist unter fw die 43 eingetragen.

Auf diese Weise lassen sich für alle Elemente von $S_{7\#}$ die Einträge in Spalte fw (=forward) finden. Ebenso sind in $S_{7\#}$ die Differenzen zu den nächst niedrigen Vielfachen vom P_7 = {2, 3, 5, 7} eindeutig. Sie sind in der Spalte bw (=backward) eingetragen. Wegen der Symmetrie in S7# gilt auch *bw = 7# - fw*. Da die Zuordnung einer Zeile von Abbildung 10 zu einem Element von $S_{7\#}$ eindeutig ist, können wir auch umgekehrt den Schluß ziehen: Jedem Element bw aus $S_{7\#}$ kann eindeutig eine Zeile der Tabelle 10 zugeordnet werden. In Abbildung 10 gibt es im Intervall in jeder Zeile mindestens eine Primzahl. Die der Zeile zugeordnete Zahl bw trifft auf ein Element s_j aus $S_{7\#}$, so dass gilt:

$$p_k + s_j = bw + 1$$

An einem Beispiel vergleichen wir die Ergebnisse von Abbildung 10 mit der Abbildung 9. Eine der eingezeichneten Diagonalen beginnt bei 97. Ein Vergleich mit den Ergebnissen der Tabelle 10 , Zeile 12 (bw = 97) zeigt: Die erste Null im Intervall 2 bis 22 ist auf Position 9 (keine Primzahl). Sie entspricht dem Durchgang der Diagonalen bei 89. Die nächste Null auf Position 15 (keine Primzahl) entspricht dem Durchgang der Diagonalen bei 83. Die nächste Null auf Position 19 (Primzahl) entspricht dem Auftreffen der Diagonalen auf 79.

Ausgehend von der Untermenge P_7 {2,3,5,7} sind im entsprechenden Stempel in der primen Restklasse sämtliche Zahlen Primzahlen, die kleiner sind als 121, dem Quadrat der nächsten Primzahl. Entsprechendes gilt auch für die Abbildung 10. Hier sind ausgehend von den gleichen Primteilern nur die Werte von Interesse, die gröÿer als 49 sind. Zusammenfassend gilt damit, dass im Füll-Bereich *2, . . .* p_{i+1} mindestens eine Primzahl liegt nur für die Primzahlen zwischen 49 und 121 anzuwenden ist.

Abbildung 10 ist ein Beispiel für die Primzahlen P_7 {2,3,5,7} des Stempels $S_{7\#}$. Die Konstruktion einer solchen Tabelle ist auch jeden höheren Stempel durchführbar. Gemäß Satz 4 ist s_j dann eine Primzahl, wenn $s_j < s_2^2$ ist. Durch geeignete Wahl (s. Anmerkung) eines höheren Stempels können wir erreichen, dass s_j in (1) eine Primzahl ist.

Anmerkung: *Wenn wir beispielsweise eine etwas grössere Primzahl betrachten, etwa p_i = 16000057, so ist diese im Stempel $S_{23\#}$ enthalten, weil 23# = 22309870 größ;er als p_ii ist. Die nächste Primzahl von 23 ist p_k = 29. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die nächste gerade Zahl, also die Zahl 16 000 058 die Summe von 2 Primzahlen muss, deren eine kleiner ist als 58 (= $2p_k$). Erst wenn wir einen Stempel S3989# benutzen, sind alle Zahlen im Stempel, die kleiner sind als 16 000 057, Primzahlen. Denn dann ist das zweite Element des Stempels s_2 = 4001 und alle Stempel-Elemente < 4001_2 = 16008001 sind Primzahlen. Dann muss es eine Lösung für die Goldbachsche Vermutung geben, bei der eine der beiden Primzahlen kleiner ist als 8002.*

Wir haben nun gesehen, dass ein Element aus $S_{7\#}$ einer Variation der **Basis-Primzahlen** p_i = 2, 3, 5, 7; p_i, (i = 1, . . . n); n = 4 entspricht unter der Bedingung, dass eine Primzahl fixiert ist. Da im Bereich 1 bis 22 (= $2p_{i+1}$) mindestens noch eine Primzahl liegt, wenn die andere fixiert ist, folgt daraus, dass auch für das entsprechende Element, das im bw eingetragen ist, eine Lösung der Goldbachschen Vermutung existiert und zwar im Bereich $2p_{i+1}$, dem Füll-Bereich. Dies ist auch der Grund für die Gültigkeit des Bertrandschen Postulats.

Es kann noch weitere Lösungen des Goldbach-Problems, bei welchen die kleinere der beiden Primzahlen als größer als $2p_{i+1}$ ist. Es gibt aber immer zumindest eine L¨seng bei der die kleinere der beiden Primzahlen < $2p_{i+1}$ ist. Für größ Zahlen läÿt sich eine entsprechende Tabelle wie in Tabelle 10 konstruieren und die Werte fw und bw in derselben Weise bestimmen. Ein Element s_j des Stempels und die im Intervall $2p_{i+1}$ vorhandene Primzahl bilden dann die gesuchte Summe, wenn im Stempel nur Zahlen < p^2_{i+1} gewählt werden.

Durch die Fixierung auf die 1 in Abbildung 10 wird sichtbar (ähnlich wie in Satz 7): Wir haben hier eine multiplikative Abbildung der Primzahlen bis 7 auf den Stempel $S_{7\#}$. Die Abbildung der 1 wird durch Konstruktion ausdrücklich ausgeschlossen (außer in der letzten Zeile), d. h. die Produkte 1*3, 2*3, 3*3, usw., sowie 1*5, 2*5, 3*5 und 1*7, 2*7, 3*7 sind ausgeschlossen.

Daraus folgt, dass in jeder der 48 Kombinationen nicht nur Produkte der Zahlen 3, 5 und 7 auftreten können, sondern mindestens eine Zahl ist kein solches Produkt, also eine Primzahl.

Durch geeignete Wahl des Stempels kann erreicht werden, dass $s_j < s_2^2$ und damit eine Primzahl ist. Für gerade Zahlen 2n , für die 2n -1 eine Primzahl ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

2. Fall: Die Zahl 2n-1 ist keine Primzahl. Wir betrachten wieder einen Stempel $S_{pn\#}$ und in ihm die Primzahlen < $p_{n+1}^2 = s_2$. Sei p_j eine solche Primzahl. Im Fall 1 wurde gezeigt, dass pj+1 die Summe aus 2 Primzahlen ist. Durch Addition von p_j und den Primzahlen < $2p_{n+1}$ ergeben sich die geraden Zahlen bis zur nächsten Primzahl. Im Füll-Bereich [1, . . . , $2p^{n+1}$] sind jedoch nicht alle ungeraden Zahlen Primzahlen, sondern es kommen auch Produkte der Basis-Primzahlen vor. Es sind dies die Zahlen 9, 15, 21, ... So wie sich eine Fixierung auf die 1 vornehmen lässt, können wir auch die Fixierung auf jede andere ungerade Zahl im Bereich $2p_{i+1}$ vornehmen und mindestens eine weitere Zahl in diesem Bereich verbleibt dann als Primzahl. Die Fixierung auf die Primzahlen 3, 5, 7 usw. erübrigt sich, da diese Zahlen zusammen mit p_j die Goldbachsche Vermutung erfüllen. Wenn wir die Fixierung auf eine der Zahlen 9, 15, . . . durchführen, erhalten wir eine Primzahl < $2p_{n+1}$, welche zusammen mit einer Primzahl < p_j die Goldbachsche Vermutung erfüllen. Damit ist die Goldbachsche Vermutung bewiesen.

Der Beweis für den zweiten Teil kann vereinfacht werden: Die vorausgegangenen Ergebnisse haben gezeigt, dass es sich bei der Lösung der Goldbach-Vermutung um die Reste r_j einer Primzahl p_j zu den Basis-Primzahlen p_1, p_2, p_3, . . . ,p_k handelt. Die Reste der Zahl p_j - 2 bezüglich der Basis-Primzahlen sind die Zahlen r_j - 2 oder p_j - r_j - 2, falls r_j < 2 . Für p_j - 2 könnte man daher wieder eine Fixierung vornehmen. Vorausgesetzt, es handelt sich bei p_j - 2 um keine Primzahl, muss man die Diagonale in Abbildung 9, die bei p_j beginnt, um 2 anheben. Dann beginnt die Diagonale für p_j - 2 bei -1 mit der gleichen Sequenz von Basis-Primzahlen und Nullen wie sie für p_j berechnet wurde. Daraus ergibt sich, dass das Intervall [1, . . . ,$2p_{n+1}$] für p_j - 2 zum Intervall [-1, . . . ,$2p_{n+1}$ - 2] wird. Dieses Subtrahieren von 2 erfolgt solange bis die vorhergehende Primzahl p_{j-1} erreicht ist, d.h. die erste Null in der Sequenz erreicht wird. Dann beginnt wieder das im ersten Teil des Beweises beschriebene Vorgehen. Dies wird in Tabelle 11 für die Zahlen 98, 96, 94 und 92 dargestellt.

	Primzahlen							P	P		P		P				P		P				P		P			
N	Intervall (1-22)						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
97	.	.	.	.	.	.	0	2	5	2	3	2	7	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	7	2
95	.	.	.	.	0	2	5	2	3	2	7	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	7	2		
93	.	.	0	2	5	2	3	2	7	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	7	2				
91	0	2	5	2	3	2	7	2	0	2	3	2	5	2	0	2	3	2	0	2	7	2						

Abbildung 11: Berechnung der Goldbach-Zahlen für 98 - 92

Ich möchte diese Fixierung an einem Beispiel demonstrieren. Wir betrachten die Zahl 147. Sie hat die Primfaktorenzerlegung 3 * 7 * 7 . Die davor liegende Primzahl ist 139. Wenn wir durch 147 eine Diagonale mit 45° ziehen (Abb. 9), schneidet sie die 139 bei 9. Mit 147 befinden wir uns in einem Bereich, in dem alle Primzahlen durch die Basis-Primzahlen 2, 3, 5, 7 und 11 erzeugt wurden. Wir werden also diese 5 Basis-Primzahlen im Intervall [1, 26] so variieren, dass sie nicht auf die Zahl 9 treffen: Die Zahl 2 müssen wir immer auf der 2 starten lassen. Die Zahl 3 lassen wir auf 1 oder 2 starten, aber nicht auf 3, da sie ja dann auf die 9 treffen würde. Die Zahl 5 können wir auf 1, 2, 3 und 5 starten lassen. Entsprechend die Zahl 7 auf 1, 3, 4, 5, 6 und 7 und die Zahl 11 auf 1, 2, 3, . . . ,8, 10 und 11.

Primzahlen					Bereich von 1 bis 26																									
2	3	5	7	11																										
Einsatz-punkte					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
2	1	3	1	5	3	2	5	2	11	2	3	2	0	2	0	2	3	2	7	2	0	2	3	2	0	2	5	2	3	2

Abbildung 12: Fixierung der 5 Basis-Primzahlen auf 9 für die Zahl 147

Insgesamt ergeben sich 480 Möglichkeiten. Ich möchte hier nicht alle diese Möglichkeiten aufisten, sondern nur diejenige, die uns interessiert. Sie ist in Abb. 12 gezeigt. Die Differenzen von 147 zu den vorangehenden Vielfachen von 2, 3, 5, 7 und 11 sind 1, 0, 2, 0 und 4. Dies entspricht den in Abbildung 10 gewählten Startpositionen. Wie wir sehen, sind die Primzahlen 11 und 17 mit Nullen belegt. Dies entspricht den Primzahlen 137 und 131, wenn wir die bei 147 beginnende Diagonale weiter verfolgen.

Es ist nicht notwendig, die Tabelle aller Möglichkeiten aufzustellen, um die gesuchte Primzahl für die Goldbachsche Vermutung zu fnden. Für den Algorithmus genügt es vielmehr, die Primfaktorenzerlegung von *2n - 1* und die Differenzen von *2n - 1* zu den vorangehenden Vielfachen der Basis-Primzahlen, die nicht in der Primfaktorenzerlegung von *2n - 1* enthalten sind, d.h. die Reste von *2n - 1* bezüglich der Basis-Primzahlen zu ermitteln, um mit ihnen die Startpunkte für die Basis-Primzahlen festzulegen. Damit erhalten wir einen Bereich wie in Abbildung 10. Die Primzahlen p_a , die dort eine Null aufweisen, sind zusammen mit $2n\text{-}p_a$ Lösungen für die Goldbachsche Vermutung von *2n*.

Die Goldbachschen Zahlen müssen gewissermaÿen 2 Siebe hintereinander passieren. Das erste Sieb ist das Sieb des Eratosthenes, bei dem alle Primzahlen bei Null beginnen. Das zweite Sieb ist ähnlich aufgebaut wie das erste, jedoch beginnen die Basis-Primzahlen ihren Lauf nicht alle bei Null, sondern an anderen Startpunkten, die mit Hilfe der Reste von *2n - 1* berechnet werden können.

Sierpinksi erwähnt in seinem Buch über die Theorie der Zahlen [Waclaw Sierpinski: Grundlegende Theorie der Zahlen, Wasawa 1964] in dem Abschnitt über Goldbachs Vermutung das Problem der Differenzen von Primzahlen. Anhand der obigen Ausführungen kann mit Hilfe der Zahlen fw und der Diagonalen in Richtung 315° (in Abb. 9 nicht eingezeichnet) auch der Satz bewiesen werden, dass jede gerade Zahl die Differenz zweier Primzahlen ist.

5. Ein Algorithmus zur Primzahlen-Berechnung

Im vorigen Abschnitt sind die Elemente von S7# aufgeführt und in der Abbildung 6 sind die Reste res_i dargestellt. Mit der Abbildung 12, der Tabelle mit der Fixierung einer Primzahl auf die Position 1 sind die Startpositionen (nennen wir sie pos_i der 4 Primteiler 2, 3, 5 und 7 dargestellt, welche pro Zeile jeweils zu einer Fixierung auf die 1 führen. Die Anzahl dieser Primteiler, d.h. der Basis-Primzahlen. ist momentan n=4. Ein Vergleich der beiden Tabellen zeigt, dass sich die Werte res_i und pos_i jeweils um 1 unterscheiden. Es ist $pos^i = res_i + 1$.

Die Nullen eines Füll-Bereichs, d. h. einer Zeile in Abbildung 12 zeigen an, wo sich - ausgehend von einem Element s_k von $S_{7\#}$ eine vorausgehendes Element von $S_{7\#}$ befindet. Für die Elemente $_k$, welche kleiner als 121, dem Quadrat der nächsten Primzahl sind, bedeutet dies, dass wir in $S_{7\#}$ dadurch ein Element fnden, welches eine Primzahl ist. Dies gilt zumindest bis 49, dem Quadrat der Primzahl 7.

Umgekehrt kann man auf Grund der Symmetrie der Stempel⁄primen Restklassen auch die auf das Element s_k folgenden Primzahlen finden. Dazu müssen die Startpositionen für eine Zeile in Tabelle 10 anders gewählt werden und zwar gerade komplementär zu den gerade beschriebenen Werten. Wir müssen daher als Startpositionen die Werte $pos_i = p_i .. res_i + 1$ wählen und den im vorigen Kapitel geschilderten Algorithmus anwenden.

Ein Feld-Element des Füll-Bereichs kann mehrfach durch Primteiler belegt werden. Im vorigen Abschnitt wurde nur die einfache Belegung zur Verdeutlichung des Algorithmus zugelassen. Zur Beschleunigung des Verfahrens kann man die Prüfung, ob ein Feld schon belegt ist, weglassen und sich außerdem nur auf Feld-Elemente mit ungeraden Index beschränken.

Die Anzahl der Feld-Elemente des Füll-Bereichs ist hier zunächst $2p_{i+1}$. Bildet dieser Füll-Bereich einen Bereich ab, in dem das Quadrat $p^2{}_{n+1}$ liegt, so ist das entsprechende Element im Füll-Bereich eine Null und muss deshalb bei der Ausgabe der Primzahlen ausgesondert werden.

Die letzte Null, welche wir im Füll-Bereich 1, . . . ,$2p_{i+1}$ finden, kennzeichnet die Primzahl p_{neu}, wenn sie nicht dem Primzahl-Quadrat $p^2{}_{n+1}$ entspricht. Mit dieser neuen Primzahl können wir im nächsten Bearbeitungsschritt fortfahren. Die neuen Reste res_i erhalten wir, wenn wir aus dem Füllbereich die Differenz der neuen Primzahl mit dem letzen Eintrag von p_i in dem Füllbereich bilden.

Ist $p^2{}_{n+1}$ überschritten (hier =121), gehen wir zu $S_{11\#}$ über, d.h. die Primzahl 11 wird in die "Basis-Primzahlen" aufgenommen. Damit ist deren Anzahl n=5. Der Rest res_5 für 11 ist bei 121 = Null. Die Anzahl der Feld-Elemente des Füll-Bereichs wird 26. Der Rest res5 für 11 bei 121 ist Null.

Die ist jedoch die einzige Zahl, auf die bei der Aussonderung geachtet werden muss. Insgesamt kommen wir bei dieser Berechnung der Primzahlen mit sehr wenigen Divisionen aus. Wir müssen für einen $2p_{i+1}$-Bereich lediglich das Feld mit den Basis-Primzahlen p_i belegen und die Primzahlen purzeln heraus wie die Kugeln bei einem Kaugummi-Automaten. Nur auf eine Zahl müssen wir achten, nämlich auf $p^2{}_{n+1}$. Sie ist keine Primzahl und sie erhöht, wenn sie überschritten wird, die Anzahl der Basis-Primzahlen um 1 und die Gröÿe des Füll-Bereichs.

Ich möchte das Vorgehen an einem Beispiel demonstrieren: Ich beginne mit der Primzahl 97. Die Primzahlen < √97 sind 2, 3, 5 und 7. Sie sind in den Abbildungen 10 und 11 die Basis-Primzahlen. Die nächste Primzahl ist 11. Die Anzahl der Elemente des Füll-Bereichs ist 2 * 11 = 22. Die Reste von 97 bezüglich 2, 3, 5 und 7 sind 1, 1, 2 und 6. Wir berechnen die Komplemente. Sie sind 1, 2, 3 und 7. Das Ganze ist noch einmal für den Startwert 97 in Tabelle 13 zusammengefasst.

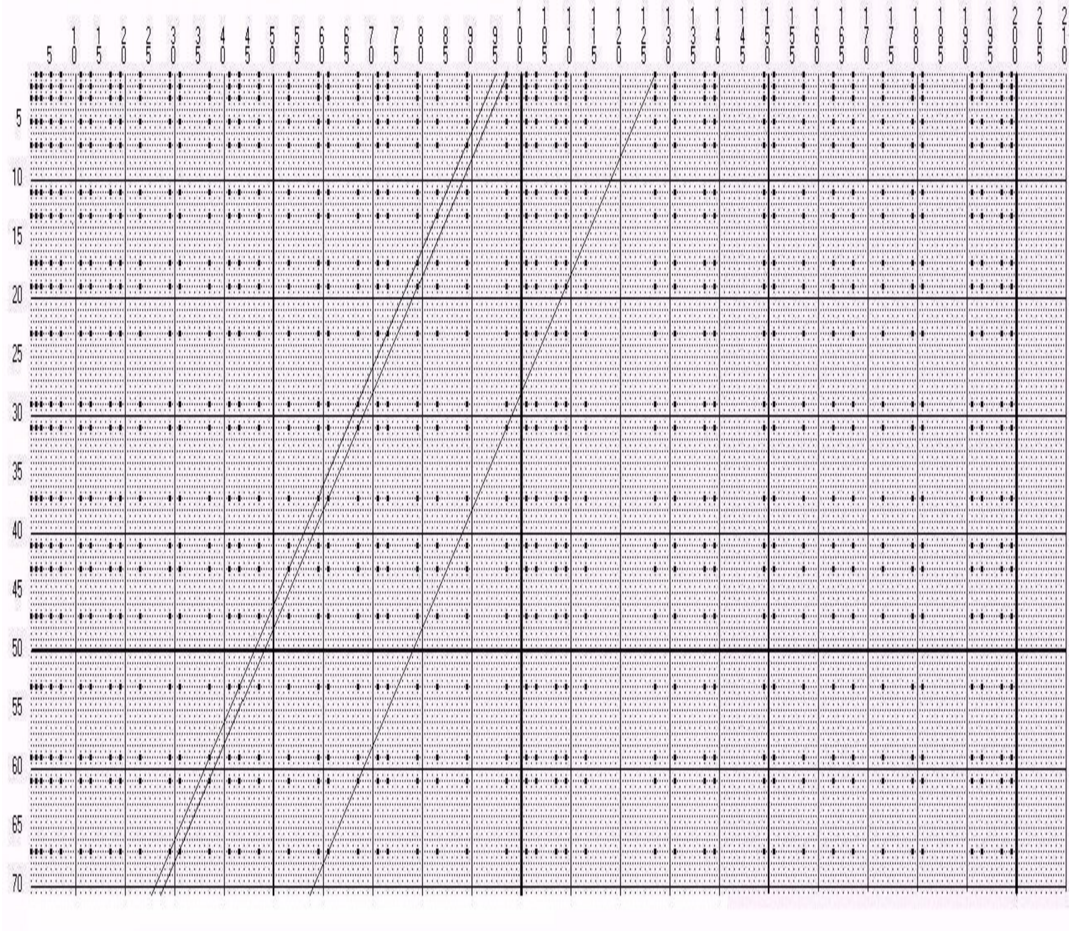


Abbildung 13: Startwert 97. Primzahlen und Modulo-Werte

Die Werte "Komplement" + 1 sind die Startpositionen für den im vorigen Kapitel beschriebenen Algorithmus. Tabelle 13 zeigt das Ergebnis.

Hierbei ist außer dem ersten Wert der 5., 7., 11., 13. und 17. Wert eine Null. Die bedeutet: 101, 103, 107, 109 und 113 sind Primzahlen. Die letzte Primzahl dieser Reihe ist 113. Sie oder das nächste Prim-Quadrat ist der Startwert für den nächsten Durchgang. Durch Modulo-Berechnung oder Differenzbildung bei der letzten Primzahl des Füll-Bereichs erhält man die Reste und ihre Komplemente. Diese sind nun die neuen Startpositionen, usw.

4 Primzahlen	22 Füll-Bereichselemente
2 3 5 7	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
Start-Positionen	Primzahlen in den Feldern des Füllbereichs
2 3 4 2	0 7 3 5 0 3 0 2 7 2 0 3 0 5 3 7 0 3 5 2 3 2

Abbildung 14: Startwert 97. Primzahlen und Füllbereich

Mit 113 als Startwert ergeben sich die Primzahlen 127 und 131. Auch der 9. Wert, welcher der Zahl 121 entspricht, enthält eine Null. Dies war zu erwarten und dieser Wert wird als Primzahl ausgesondert. Der nächste solche Wert wäre 143, das Produkt 11 * 13. Jedoch liegt dieser Wert außerhalb des Füll-Bereichs. Mit 127 und 131 überschreiten sogar 2 Primzahlen das Primzahl-Quadrat 121 und die nächste Berechnung mit dem Startwert 131 enthält 5 Reste für die Basis-Zahlen 2, 3, 5, 7 und 11 und die Anzahl der Feld-Elemente beträgt 26. Der Rest der Zahl 131 bezüglich der Zahl 11 ist 10. Dies berechnet man als Differenz zum Primzahl-Quadrat 121

Im Algorithmus sind 20 Schritte von 97 bis 811 erforderlich und man erhält 116 Primzahlen, 40 Schritte sind von 97 bis 2221 nötig. Das sind 311 Primzahlen.

Man kann den Algorithmus noch um einiges verbessern: Der Füll-Bereich kann vergröyert werden, wenn die Differenz p_{n+1} - p_n größer als $2p_n$ ist. Im Algorithmus kann der Füll-Bereich so gestaltet werden, dass in einem Berechnungsschritt alle Primzahlen zwischen $p^2{}_n$ und $p^2{}_{n+1}$ gefunden werden.

6. Ein Algorithmus zu Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren

Im vorigen Abschnitt wird gezeigt, wie aus einem Füllbereich die Primzahlen entnommen werden können. An den entsprechenden Positionen sind Nullen eingetragen. Entsprechend haben die anderen Positionen des Füllbereichs positive Einträge von Primzahlen. Diese Einträge sind nun Primfaktoren der entspechenden Zahl. Wir müssen also den Füllbereich so wählen, dass die Zahl z, deren Primfaktoren wir ermitteln wollen, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahl-Quadraten liegt. Aus dem vorigen Abschnitt ist ersichtlich, dass nicht nur die Primzahlen eine Null enthalten, sondern auch die Quadrate der Primzahlen. Wir bewegen uns hier beispielsweise in einer primen Restklassengruppe oder anders gesagt im Stempel $S_{7\#}$. Dort sind $p^2{}_n = 121$ und $p^2{}_{n+1} = 169$ ebenfalls Elemente. Wir müssen also $p^2{}_n$ und $p^2{}_{n+1}$ so wählen, dass $p^2{}_n < z < p^2{}_{n+1}$ ist. Den korrespondierenden Füllbereich lassen wir dann bei $p^2{}_n$ beginnen und bei $p^2{}_{n+1}$ oder frühestens bei z enden - der eigentliche Füllbereich beginnt, wie oben gezeigt, immer bei 1. Nach Ausfüllen des Füllbereichs sind die Einträge bei der Position im Füllbereich, welche z entspricht - Primfaktoren von z.

Man muss also von Primzahl-Quadrat zum nächsten Primzahl-Quadrat fortfahren, bis die oben genannte Bedingung erfüllt ist. Am Ende jedes Füll-Bereichs, d.h. dem Intervall [$p^2{}_n, \ldots, p^2{}_{n+1}$], werden die Reste bzw. Komplemente für den nächsten Berechnungsschritt bestimmt. Die Anzahl der Basis-Primzahlen wird um eine Primzahl erhöht.

Natürlich erhalten wir nicht alle Primfaktoren, denn Mehrfacheinträge eines Primfaktors können nicht Einträge bei der Position sein, welche z entspricht. Auch Primfaktoren gröÿer p_n sind nicht eingetragen.

Es wäre ein großer Rechenaufwand, jedesmal alle Primzahlen, beginnend bei der ersten, zu berechnen. Deshalb empfiehlt es sich, in gewissen Abständen die Komplemente zu speichern. Beispielsweise für die j-te Primzahl $p^2{}_j$ alle Komplemente zu speichern, welche bei $p^2{}_j$ zum Weiterrechnen notwendig sind.

Stellt man sich die Primzahlen in waagrechten Linien geordnet vor: Auf der ersten Linie ist die Primzahl 2 und wird bei 4, 6, 8, 10, . . . wiederholt. Die Primzahl 3 liegt in die nächsten Zeile. Sie wird bei 6, 9, 12, 15, . . wiederholt. Entsprechend wird mit den weiteren Primzahlen verfahren: Auf der i-ten Linie liegt die Zahl p_i und wird bei $2p_i$, $3p_i$, . . wiederholt. Jede Primzahl p_i nimmt ab ihrem Quadrat $p_i{}^2$ Einfluss auf die Bildung der Primzahlen. Mit der 4. Primzahl beispielsweise werden die Zahlen 49, 77 und 91 aus der Menge der Primzahlen eliminiert.

Der vorgestellte Algorithmus macht einen senkrechten Schnitt durch diese Linien. Dieser Schnitt reicht jeweils bis zur i-ten Linie. So wird für die Zahlen ≥ 49 bis zu den Zahlen < 121 der Schnitt bis zur 4. Linie durchgeführt. Trift dieser Schnitt keinen Eintrag, so ist die Zahl prim. Trifft er jedoch eine oder mehrere Zahlen, so sind diese Primteiler. Bei jedem Schnitt kommt jeder Primteiler jedoch nur einmal vor.

Im Algorithmus lassen sich mehrere Korrekturen anbringen, um ihn schneller zu machen: Verzichtet man auf die Primfaktoren der geraden Zahlen, kann man im Füll-Bereich die geraden Zahlen weglassen. Ähnlich verhält es sich bei Zahlen die durch 3, 5, 7 und einige andere teilbar sind. Ich verweise hierzu auf die Teilbarkeitskriterien in [Zahlentheorie, Prof. Dr. Harald Schmitt, ISBN 3-411-14841-1, p. 121 ff.].

Da bei Füllen des Bereichs jede zweite Zahl gerade ist, kann man den Füll-Bereich schneller auffüllen, in dem man an diesen Stellen auf das Auffüllen verzichtet. Hat man die Primzahlen und die Komplemente bei $p^2{}_i$ berechnet und gespeichert,n ist es zuweilen sinnvoller, den Berechnungs-Prozess rückwärts zu durchlaufen, um z.B. Primfaktoren für eine Zahl zu finden, die zwischen $p^2{}_{i-1}$ und $p^2{}_i$liegt.

Es sind noch weitere Maßnahmen möglich, um den Algorithmus zu beschleunigen. Wird der Füll-Bereich zu groß, um ihn im Computer-Programm als Ganzes zu bearbeiten, läßt er sich unterteilen. Ist man an den Primzahlen > p_{i+1} nicht interessiert, kann man den Prozeß solange fortsetzen, bis man die Primzahlen bis p_{i+1} gefunden hat. Man hat dann ein p^2 erreicht, welches größer als p_{i+1} ist und die Reste oder Komplemente sind dann dort bekannt. Nun kann man die Reste von $p^2{}_i$ bezüglich der Basis-Primzahlen mit anderen Methoden berechnen. Daraufhin berechnet man die Primfaktoren im Füllbereich [$p^2{}_i, \ldots, p^2{}_{i+1}$] in der oben beschriebenen Weise.

In www.gloeggler.de/Beispiel-D.pdf werden die Primfaktoren der Zahl 10117 auf diese Weise berechnet.

7. Vergleich mit der Zeta-Funktion

Vergleicht man diese Ergebnisse mit der Riemannschen Zeta-Funktion, so stellt man folgendes fest: Die Berechnung der Primzahlen erfolgt zwischen $p^2{}_i$ und $p^2{}_{i+1}$, indem die vorausgegangenen Ergebnisse - die Primzahlen bis p_i und die Reste bzw. Komplemente zu diesen Primzahlen an der Stelle $p^2{}_i$ benutzt werden, um die Primzahlen bis $p^2{}_{i+1}$ zu ermitteln. Mit dem im vorigen Kapitel beschriebenen Algorithmus fällt dann auf $p^2{}_{i+1}$ keine Zahl, d.h. dies ist zunächst eine Primzahl im Sinne des Algorithmus. Da man aber p_{i+1} bereits kennt, kann man dort diesen Wert eintragen. Bei der Zeta-Funktion, welche mit den reziproken Werten der Primzahlen arbeitet, haben die Nullstellen den Realteil ¹⁄₂. Dies entspricht bei dem hier geschilderten Algorithmus einem Stop bei $p^2{}_{i+1}$. Dort kommt zum ersten Mal die Primzahl p_{i+1} ins Spiel. Zwischen den Quadraten von aufeinanderfolgenden Primzahlen, ja sogar zwischen Quadraten von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen liegen Primzahlen, wie mit Satz 2 gezeigt wird. Die Berechnung der Primzahlen stoppt jedesmal nur bei $p^2{}_{i+1}$, wie bei der Zeta-Funktion jedesmal mit einer Nullstelle mit dem Realteil ¹⁄₂.

8. Schluß

Ich möchte hier nochmals auf die eingangs erwähnte Ulam-Spirale hinweisen. In der Diagonale, beginnend bei 1 nach rechts oben liegen die Quadratzahlen der geraden Zahlen. In der Diagonale beginnend bei 4 nach links unten liegen die Quadrate der ungeraden Zahlen. Aus Satz 8 folgt, dass zumindest bis zum Erreichen der nächsten geraden und ungeraden

Quadratzahl, also bei jeder halben Umdrehung der Spirale bis zu einer dieser Diagonalen mindestens zwei Primzahlen auftreten. Eine Linie senkrecht zu dieser Diagonalen durch die Zahlen 6, 20, 42, . . . , d.h. n^2 - n, (n ungerade), bzw. auf der anderen Seite durch die Zahlen 12, 30, 56, . . . , d.h. n^2 - n (n gerade) kennzeichnet die Intervallgrenzen. Zwischen diesen Intervallgrenzen und den Quadraten liegt mindestens jeweils eine Primzahl.

An diesen Punkten (eine Zahl später) ändert die Ulam-Spirale ihre Richtung um 90° bzw. um -90° je nachdem, ob die Spirale im oder gegen den Uhrzeigersinn gezeichnet wird. Es spielt dabei keine Rolle, ob die Spirale mit der 2 rechts, links, oberhalb oder unterhalb von der 1 begonnen wird. Beginnt die Ulam-Spirale mit der Null in der Mitte, so ändert sie genau an den Eckpunkten ihre Richtung um 90°.

Haben Sie Fehler darin entdeckt oder stimmen Sie meinen beweisen zu, teilen Sie mir dies per Email mit.